数理解析研究所講究録
277巻 1976年 88-92

Rudvalis群について

北大 理　　吉田 知行
奥山 哲郎

Rudvalisによって発見された、位数 $2^{14}\cdot 3^3\cdot 5^3\cdot 7\cdot 13\cdot 29$ の単純群（以下、Rd.と記す）について、involutionの中心化群の構造からの特徴付けが、Parrott（centralの場合）、Dempwolff（non-centralの場合）によってなされています。

ここでは、2-Sylow群の構造からの特徴付けについて考えてみます。

定理A. Rd.の2-Sylow群と同型な2群をSylow群としてもつ有限単純群は、Rd.に限る。

定理Aは、Assaによって既に得られているようですが、より一般的に、次の定理が証明されます。

定理B. Gを $O^2(G)=G$ なる有限群とし、その2-Sylow群Tが、次の条件を満足するとする。

(a). $|T| \geqq 2^{14}$ (b) $|Z_4(T)| = 2^4$

(c). $W = C_T(Z_3(T))$ とおくとき. $\Phi(W) \subseteq Z_3(T)$

(d). Aを $|W : A| \leqq 2^4$なるWの部分群とすると. $A \supseteq \Phi(W)$

このとき. 次のいずれかが成立する。

(1) $G/O(G) \cong Rd$. あるいは.

(2) $G \triangleright O(G)W$, $G/O(G)W \cong GL(3.2)$

証明の概略を以下に記す。G, T, W を定理の仮定をみたす群とする。

1. Transfer 及び. $N_G(W')$ の構造.

補題1.1.

(1). $Z(W) \supseteq W' = \Phi(W) = Z_3(T) \cong \mathbb{Z}_2^3$

(2). $T/W \cong D_8$, $W/W' \cong \mathbb{Z}_2^8$, $T/W' \cong \mathbb{Z}_2 \wr D_8$, $|T| = 2^{14}$

(3). $G \ni g$ に対し. $|W : W \cap T^g| \leqq 2$なら $g \in N_G(W')$

(4). W : *weakly closed in* T *w.r.to* G.

補題1.2.

(1) $T \subseteq X \subseteq G$なる部分群 Xに対し. $T \cap X' = T \cap N_X(W')'$

(2). $N_G(W')/C_G(W') \cong GL(3.2)$

(1)は. 1.1 (3) 及び. *Yoshida* の*Transfer* の適用による。(2)は. (1), $W' \cong \mathbb{Z}_2^3$ なることより得られる。

補題1.3. $N_G(W')=N_G(W)\ O(N_G(W'))$

1.1.(2) より. Aut T が2-群なること. 及び. $N_G(W)/C_G(W)W$ が $GL(8.2)$ の部分群であることを用いて証明される。

2. $N_G(W)$ 及び. W の構造.

$N=N_G(W)$, $\bar{N}=N_G(W)/O(N_G(W))$ とおくとき. 補題1.2. 1.3より. $\bar{N}/\bar{W}\cong GL(3.2)$ は. $W/W'\cong \mathbb{Z}_2^8$, $W'\cong \mathbb{Z}_2^3$ に. faithfulに作用している。

補題2.1. $\bar{N}/\bar{W}$ は. W/W', W' へ既約に作用している。

W' へは. 明らかで. W/W' のときは. $GL(3.2)$ の 2-modular 表現の理論を用いることができる($GL(3.2)$ の既約な. 2-modular 表現は. 4個で次数が. 1, 3, 3, 8, すべて. $\mathbb{Z}_2$ 上で書ける).

補題2.2. W の構造は. 一意的に決定される。

W/W', W' を. $GF(2)[GL(3.2)]$-加群と考える。このとき. $W/W'\otimes W/W' \ni x\otimes y \longmapsto [x,y]\in W'$ なる $GL(3.2)$-準同型を考えると. $W/W'\otimes W/W'$ の既約 factor module を調べることより. $[x,y]$ が一意的に定まる。さらに. $W/W'\ni x\mapsto x^2\in W'$ なる写像を考えると. x^2 が一意的に決まることが示され.

Wの構造が決定される。

補題2.2の証明に使われる条件は、Rd.の2-Sylow群のWに相当する部分群についてもみたされており、以下においてDempwolffのいくつかの補題の結果を利用することができる。

補題2.3. rank $W = 5$, Wは、367個のinvolutionsをもつ

補題2.4. Nでのinvolutionsの共役類は、4個で、次のようにとれる。

$t \in T - W$, $e, u \in W - W'$, $z \in W'$

$|C_{\bar{N}}(t)| = 2^8$, $|C_{\bar{N}}(u)| = 2^{11}$, $|C_{\bar{N}}(e)| = 2^8 \cdot 7$, $|C_{\bar{N}}(z)| = 2^{14} \cdot 3$

$C_T(e) \cong Z_2^2 \times Sz(8)_2$ は $C_G(e)$ の2-Sylow群.

これらは、Dempwolffの結果などから容易に導かれる。

3. involutionsのfusion及び中心化群の構造

W'が、strongly closed in T w.r.to Gのときは、Goldschmidtにより、Gが決定され、定理の(2)が成立する。以下、W'は、strongly closedでないとする。

補題3.1. t, u, e, zについて.

$t \sim u \sim z \not\sim e$ in Gが成立する。

$\overline{N}/\overline{W} \cong GL(3,2)$のorder 3の元の$W$での中心化群を$Q$とおくと. $Q \cong Q_8$, $C_W(Q) = Y$はZ_2^5と同型となる。

このとき. 次が成立する。

補題3.2. $N_G(Y)/O_{2'2}(N_G(Y)) \cong S_5'$

$$C_G(Y)' = \langle z \rangle O_{2'}(N_G(Y)) \lhd N_G(Y)$$

これより. $C_G(z)/O_{2'2}(C_G(z)) \cong S_5'$ が導かれる。

補題3.3. $C_G(e)$: solvable または. $C_G(e)/O(C_G(e))$ は $Z_2^2 \times Sz(8)$ に同型

補題3.2, 3.3, 及び Gorenstein-Walter より $O(C_G(z)) = 1 = O(C_G(e))$ となり. Parrott, Dempwolff の結果から. Gが決定できる。